Početní část 2 - 3.6.2021

3. Uvažte funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \log(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) dokažte, že f je spojitá na $\mathbb{R}^2$,

   (b) najděte její největší a nejmenší hodnotu na množině

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq \mathrm{e}\}$$

   (10 bodů).

4. Uvažujte funkci $z(x,y)$ zadanou implicitně vztahem

$$(\mathrm{e}^z + z^3 + z)(1 + x^2y^2 + \mathrm{e}^{xy^3}) = (2+\mathrm{e})^2.$$

   Ověřte, že na okolí bodu $(1,1)$ existuje takto zadaná funkce s funkční hodnotou $z(1,1) = 1$. Spočítejte totální diferenciál této funkce v bodě $(1,1)$ (8 bodů).

Řešení

3. Funkce je zjevně spojitá na ve všech bodech $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, dále si stačí uvědomit, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y \ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi \ln r^2 = 0$$

ze škálovací limity a větičky "$0 \cdot$ omezená". Funkce je tedy spojitá i v bodě $(0,0)$. Množina M je zjevně omezená (podmnožina koule o poloměru $\sqrt{e}$) a uzavřená (zadaná neostrými nerovnostmi) a proto má f globální extrámy vzhledem k M.

Nejprve budeme hledat lokální extrémy uvnitř množiny M:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3y}{x^2+y^2} = 2xy\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Zajímají nás jen stacionární body uvnitř prvního kvadrantu (na osách je zřejmě funkce rovná nule), to vede na rovnici $x^2 = 2y^2$ a odtud

$$\ln(3y^2) = -\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{1}{3\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}}, \quad x = \sqrt{\frac{2}{3\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}}.$$

Vidíme, že $x^2+y^2 = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} < \mathrm{e}$ a stacionární bod leží uvnitř množiny M. K tomu, abychom usoudili, že v nalezeném stacionárním bodě $A = (\sqrt{\frac{2}{3\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}}, \sqrt{\frac{1}{3\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}})$ je lokální minimum, nám stačí úvaha a nemusíme ani počítat druhé derivace, funkce f je nulová na hranici čtvrtkruhu o poloměru jedna, záporná uvnitř, spojitá, musí nabývat svého minima, což musí být v jediném stacionárním bodě, který jsme nalezli. Hodnota tohoto minima je

$$-\frac{4}{9\sqrt{3}\mathrm{e}}.$$

Bod, ve kterém funkce f nabývá svého maxima na množině M, musí ležet na hranici M. Protože na osách je funkce nulová, maximum, pokud bude kladné, se bude nabývat na křivce $x^2+y^2 = \mathrm{e}$. Mohli bychom použít vázané extrémy, ale jednodušší bude si uvědomit, že na této křivce stačí vyšetřit funkci $g(y) = f(\sqrt{\mathrm{e} - y^2}, y)$. Dostáváme $g(y) = (\mathrm{e} - y^2)y$ a zajímají nás hodnoty $y \in (0, \mathrm{e})$. Lehce

$$g'(y) = (\mathrm{e} - y^2) - 2y^2 = \mathrm{e} - 3y^2,$$

Stacionární bod a zároveň tedy bod maxima funkce g je $y = \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{3}}$, tomu odpovídá $x = \sqrt{\frac{2\mathrm{e}}{3}}$. V bodě $B = (\sqrt{\frac{2\mathrm{e}}{3}}, \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{3}})$ nabývá funkce f na množině M svého maxima. Hodnota tohoto maxima je

$$\frac{2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}$$

4. Pro další potřeby zavedeme funkci

$$F(x, y, z) = (\mathrm{e}^z + z^3 + z)(1 + x^2y^2 + \mathrm{e}^{xy^3}) - (2 + \mathrm{e})^2.$$

Abychom ověřili, že v bodě $(1, 1, 1)$ vztah $F(x, y, z) = 0$ lokálně určuje funkci $z(x, y)$, spočítáme

$$\frac{\partial F}{\partial z} = (\mathrm{e}^z + 3z^2 + 1)(1 + x^2y^2 + \mathrm{e}^{xy^3}).$$

Lehce vidíme, že $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$ platí všude, $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = (4 + \mathrm{e})(2 + \mathrm{e})$, ze spojitosti derivace usoudíme, že $z \mapsto F(x, y, z)$ je na okolí $(1, 1, 1)$ monotónní, a proto můžeme používat větu o implicitní funkci.

Protože F je hladká funkce, tak také $z(x, y)$ bude hladká, k určení totálního diferenciálu tak potřebujeme spočítat parciální derivace funkce z. Zderivováním vztahu $F(x, y, z(x, y)) = 0$ podle x dostáváme

$$(\mathrm{e}^z \frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x})(1 + x^2y^2 + \mathrm{e}^{xy^3}) + (\mathrm{e}^z + z^3 + z)(2xy^2 + y^3\mathrm{e}^{xy^3}) = 0$$

a odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(\mathrm{e}^z + z^3 + z)(2xy^2 + y^3\mathrm{e}^{xy^3})}{(\mathrm{e}^z + 3z^2 + 1)(1 + x^2y^2 + \mathrm{e}^{xy^3})}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -\frac{(2 + \mathrm{e})(2 + \mathrm{e})}{(4 + \mathrm{e})(2 + \mathrm{e})} = -\frac{2 + \mathrm{e}}{4 + \mathrm{e}}$$

Podobně zjistíme také derivaci podle y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(\mathrm{e}^z + z^3 + z)(2x^2y + 3xy^2\mathrm{e}^{xy^3})}{(\mathrm{e}^z + 3z^2 + 1)(1 + x^2y^2 + \mathrm{e}^{xy^3})}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{(2+\mathrm{e})(2+3\mathrm{e})}{(4+\mathrm{e})(2+\mathrm{e})} = -\frac{2+3\mathrm{e}}{4+\mathrm{e}}.$$

Totální diferenciál funkce $z(x,y)$ v bodě $(1,1)$ je tak dán

$$\mathrm{d}z(1,1)(\mathbf{h}) = -\frac{1}{4+\mathrm{e}}\left((2+\mathrm{e})h_1 + (2+3\mathrm{e})h_2\right).$$